第十一章 复变函数与解析函数

第一节 复数及其代数运算

一、基本概念

- 1. 复数的概念
- 2. 代数运算
- 3. 共轭复数

1. 复数的概念

定义　对任意两实数x、y 称 $z=x+iy$为复数。

其中 $i=\sqrt{-1}$ — 虚单位。

•复数z 的实部 $\mathrm{Re}(z)=x$； 虚部 $\mathrm{Im}(z)=y$.
(real part)　(imaginary part)

•复数的模 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$

•复数 $z_1=z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ 　$\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$

$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$

一般，任何两个复数不能比较大小。

2. 代数运算

- 四则运算

定义　$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的和、差、积和商为:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{|z_2|^2}\quad(z_2\neq 0)$$

•运算规律

复数的运算满足交换律、结合律、分配律。（与实数相同）即，

$$z_1+z_2=z_2+z_1;$$

$$z_1z_2=z_2z_1;$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3);$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

3.共轭复数

定义　若$z=x+iy$，称 $\bar{z}=x-iy$ 为z 的共轭复数.
(conjugate)

•共轭复数的性质

(1) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

(3) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

(4) $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

二　复数的几何表示

- 1. 点的表示
- 2. 向量表示法
- 3. 三角表示法
- 4. 指数表示法

1. 点的表示

$$z = x + iy \leftrightarrow \text{实数对} \ (x, y)$$

在平面上取定直角坐标系，点$P \leftrightarrow$实数对(x, y)

$\Rightarrow z = x + iy \leftrightarrow$平面上的点$P(x, y)$

$\therefore$复数$z = x + iy$可用平面上坐标为(x, y)的点P表示.

x轴 — 实轴　　y轴 — 虚轴

平面 — 复平面或z平面

点的表示：$z = x + iy \leftrightarrow$复平面上的点$P(x, y)$

数z与点z同义，一一对应

2. 向量表示法

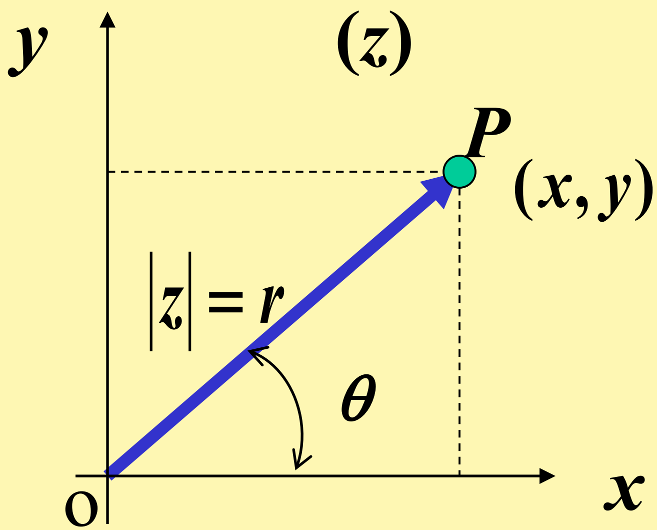
$\because z = x + iy \leftrightarrow$ 点$P(x, y) \leftrightarrow \overrightarrow{oP} = \{x, y\}$

$\therefore$ 可用向量$\overrightarrow{oP}$表示$z = x + iy$。

称向量的长度为复数$z=x+iy$的模或绝对值；记作$|z|$

非零向量与x轴正向的夹角θ 称为复数$z=x+iy$的幅角.

模：$|z| = |\overrightarrow{op}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,



幅角：$\theta \overset{记作}{=} \mathrm{Arg}z = (\overrightarrow{op}, x)$

$z = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{oP} = \vec{o}$

z=0时，幅角无意义(不确定)。

$x \neq 0$时， $\tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x}$

幅角无穷多个： $\mathrm{Arg}\, z=\theta=\theta_0+2k\pi$

$$\tan\theta_0 = y/x$$

满足 $-\pi<\theta_0\le\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\qquad \arg z\in(-\pi,\pi]$$

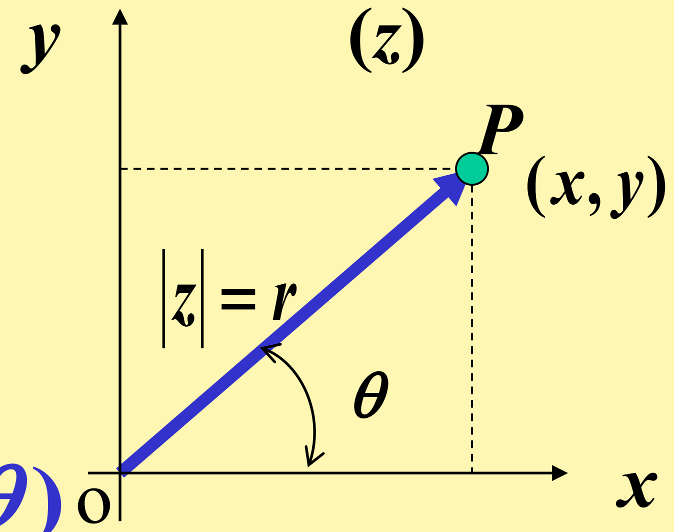
$$z = x + iy \leftrightarrow \text{点}P(x,\ y) \leftrightarrow \overrightarrow{oP} = \{x, y\}$$

3. 三角表示法

$r = |z|$

$\theta = \arg z + 2k\pi$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

4. 指数表示法

由 *Euler* 公式：

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 得

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Euler 公式: 教材P_{217}

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

定义复指数函数 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ $\quad e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^2+\cdots\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\cos y+i\sin y$$

Euler公式：

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$$

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \qquad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$$

取 $y = \pi$

$$e^{i\pi} = -1$$

例1 将下列复数化为三角式和指数式

(2) i (3) -1 (4) $1+\sqrt{3}\,i$ (5) $\dfrac{2i}{-1+i}$

(2) $i=e^{i\frac{\pi}{2}} \quad =\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(3) $-1=e^{i\pi} \quad =\cos\pi+i\sin\pi$

(4) $1+\sqrt{3}\,i=2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad =2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$

（5） $\dfrac{2i}{-1+i}=\dfrac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

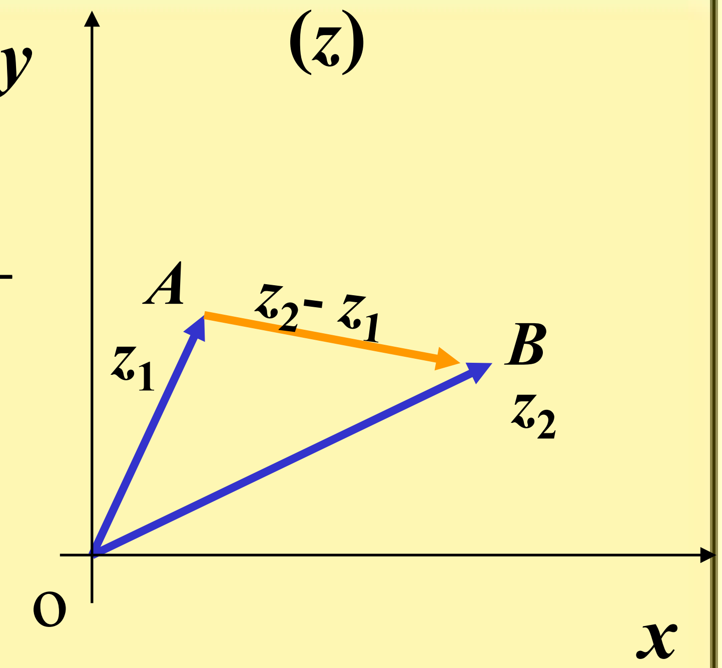
$$=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$$

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

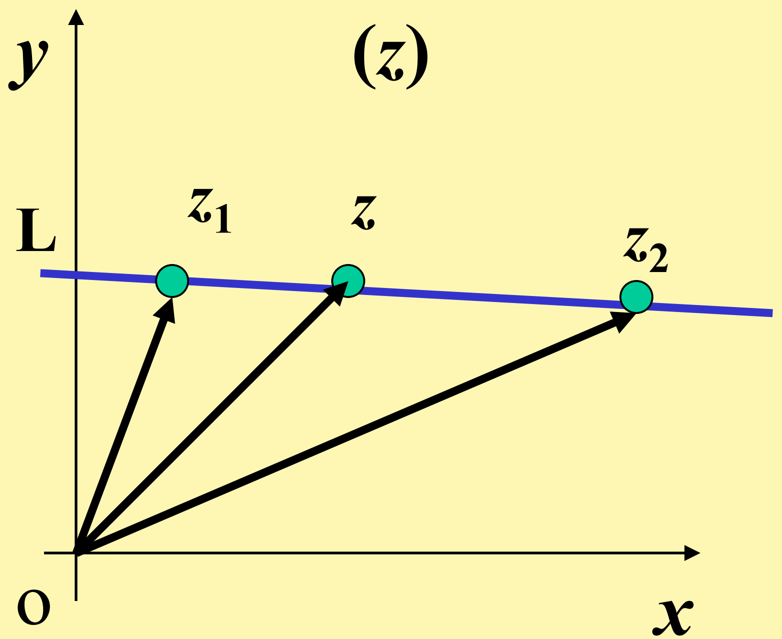
$|z_2 - z_1|$: 点z_1与z_2之间的距离



引进复数的几何表示，可将平面图形用复数方程（或不等式）表示；反之，也可由给定的复数方程（或不等式）来确定它所表示的平面图形。

例2 用复数方程表示：

(1)过两点$z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2)$的直线；



解（1）$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

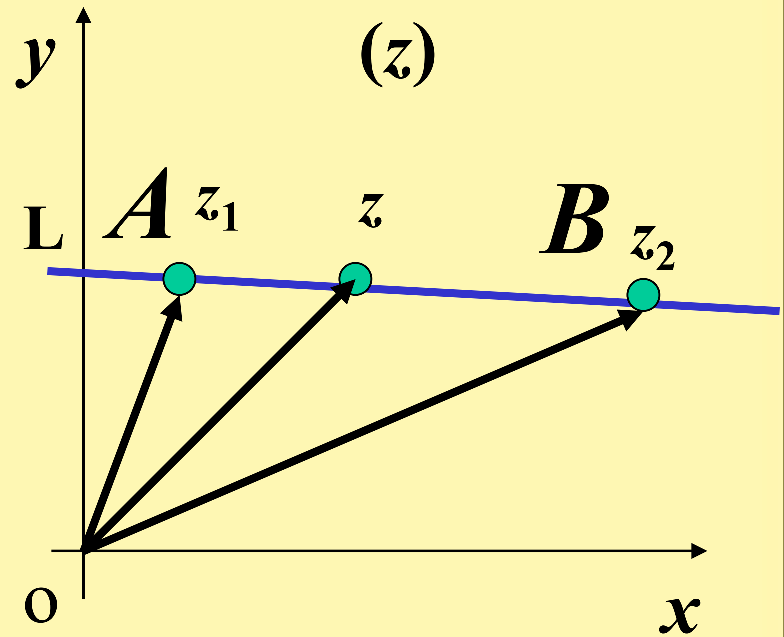
(1)过两点$z_j = x_j + iy_j \ (j = 1, 2)$的直线;

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$

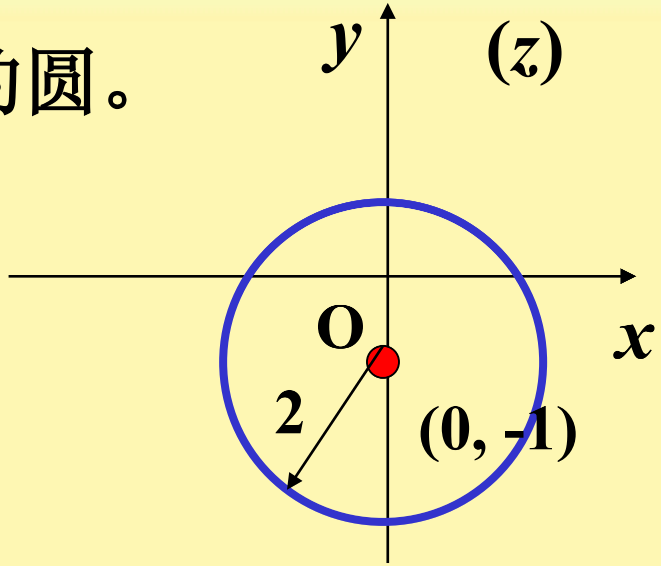


过两点A, B的直线:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1 \end{cases}$$

$$x + iy = x_1 + iy_1 + t[(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)]$$

（2）中心在点(0, -1), 半径为2的圆。



(2) $|z-(-i)|=2$

以点z_0为圆心,以r为半径的圆:

$$|z-z_0|=r$$

$z_0=x_0+y_0 i$ 以点(x_0, y_0)为圆心,以r为半径的圆:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$$

$$z=x+yi=x_0+r\cos\theta+i(y_0+r\sin\theta)$$

$$=x_0+y_0 i+r(\cos\theta+i\sin\theta)=z_0+re^{i\theta}$$

$$z-z_0=re^{i\theta}$$

三、 复数的乘幂与方根

- 1. 复数的乘积与商
- 2. 复数的乘幂
- 3.复数的方根

1. 乘积与商

定理1 两个复数乘积的模等于它们的模相乘，

两个复数乘积的幅角等于它们的幅角相加。

证明 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$

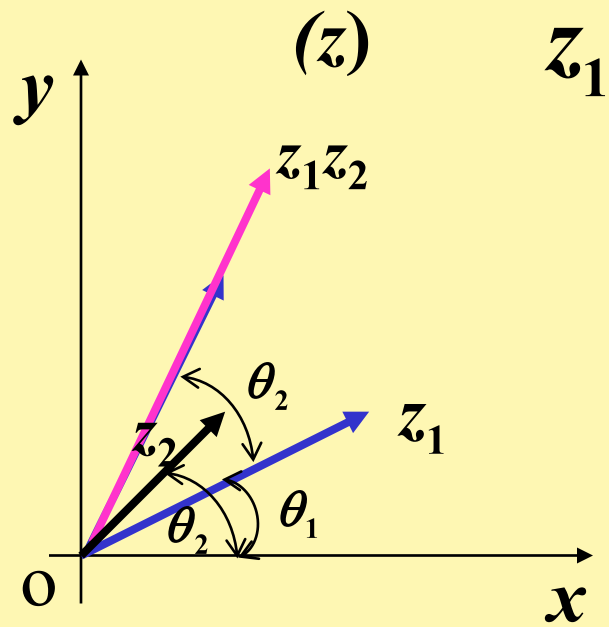
$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

则 $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

因此 $|z_1 z_2| = r_1 r_2$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

几何意义 将复数z_1按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，再将其伸缩到$|z_2|$倍。



$$z_1z_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

定理1可推广到n 个复数的乘积。

NJUPT

定理2 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的幅角等于被除数与除数的幅角之差。

证明 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

由复数除法的定义 $z=z_2/z_1$，即 $z_1 z = z_2$

$\because |z||z_1|=|z_2|$ 及 $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}\, z_2$（$z_2\neq 0$）

$\therefore \mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1$ 即：

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}$$

2.复数的乘幂

定义　n个相同的复数z的乘积，称为z的n次幂，记作z^n，即$z^n=z\cdot z\cdots z$（共n个）。

设$z=re^{i\theta}$，由复数的乘法定理和数学归纳法可证明　$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n e^{in\theta}$。

特别：当$|z|=1$时，即：$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，则有

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

—棣模佛(De Moivre)公式。

定义　$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.　$z^{-n}=\dfrac{r^0e^{i0}}{r^ne^{in\theta}}=r^{-n}e^{-in\theta}$

3.复数的方根（开方）——乘方的逆运算

问题　给定复数$z = re^{i\theta}$，求所有的满足$\omega^n = z$的复数ω.　记$\omega = \sqrt[n]{z}$

设 $\omega = \rho e^{i\varphi}$，由$\omega^n = z$，有 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\omega^n = z \Rightarrow \omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

$k = 0$时，$w_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

$k = 1$时，$w_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$

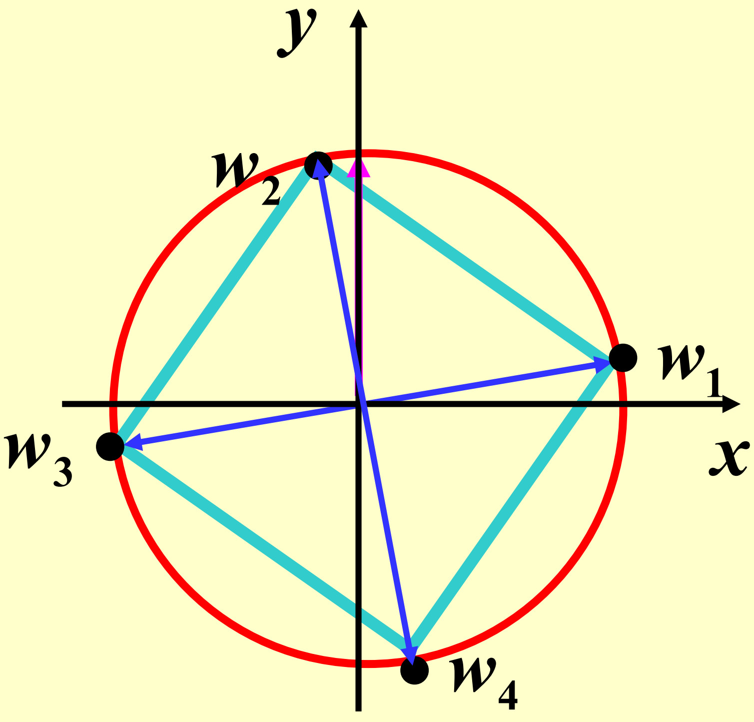
$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1^{\frac{1}{4}}[\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4})]$$

$k=2$ 时， $w_3 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$

$k=3$ 时， $w_4 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$

当k=0，1，…，n−1时，可得n个不同的根，而k取其它整数时，这些根又会重复出现。

当$z\neq0$时，有n个不同的ω值与 z相对应，每一个这样的ω值都称为z 的n次方根



$$w_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$$

$$w_3 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$$

$$w_4 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$$

*i*开4次方的几何意义

$\sqrt[4]{i}$ 的四个值是以原点为中心,以1 为半径的圆的内接正四边形的四个顶点。

$$\omega^n = z = re^{i\theta} \Rightarrow \omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的n个值是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上n个等分点，即它们是内接于该圆周的正n边形的n个顶点。

$\sqrt[3]{8} = 2$ 在实数域上正确

在复数域上： $8 = 8e^{i0}$

$$\sqrt[3]{8} = 2e^{i\frac{0+2k\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

$$(k = 0,1,2)$$